

Raspberry Pi Pico

comme analyseur de spectre

des FFT avec du matériel bon marché

Martin Ossmann (Allemagne)

Cet article montre comment construire un analyseur de spectre logiciel avec un simple RPi Pico. Une version de base avec une résolution de 12 bits et une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz est très bien adaptée aux mesures audios. Avec un CA/N externe, on peut même atteindre 50 MHz !

Avec le CA/N intégré du microcontrôleur RPi RP2040, les signaux analogiques sont échantillonnés jusqu'à 500 kHz avec une résolution de 12 bits. Dans la configuration la plus simple, c'est un PC qui effectue l'analyse fréquentielle et affiche les résultats. Une première extension avec la connexion d'un écran LCD permet déjà d'obtenir un analyseur autonome. On peut ensuite, avec un CA/N externe, atteindre jusqu'à 50 MHz, ce qui permet à l'analyseur de traiter des signaux jusqu'à 25 MHz.

500 kHz et connexion PC

Pour les premières expérimentations, le RPi Pico est câblé comme indiqué à la **figure 1**. R2 et R3 élèvent le point zéro du CA/N à la moitié de la plage de niveaux. C1 élimine les composantes continues du signal d'entrée. L'entrée utilisée, ADC2, utilise la broche 34 ainsi que le GPIO28. T1 est utilisé avec R1 pour établir un niveau TTL pour la sortie des données vers le PC via l'interface série à 115 200 bauds. Comme le circuit est assez simple, il peut être facilement mis en œuvre sur une platine d'expérimentation, comme le montre la **figure 2**.

Le CA/N fonctionne initialement avec la fréquence d'échantillonnage par défaut de 500 kHz. Il transfère ses échantillons de 12 bits à une unité FIFO, d'où ils entrent dans un tampon qui peut stocker N valeurs. N vaut généralement 1024. Lorsque la mémoire tampon est pleine, les valeurs sont envoyées en série au PC.

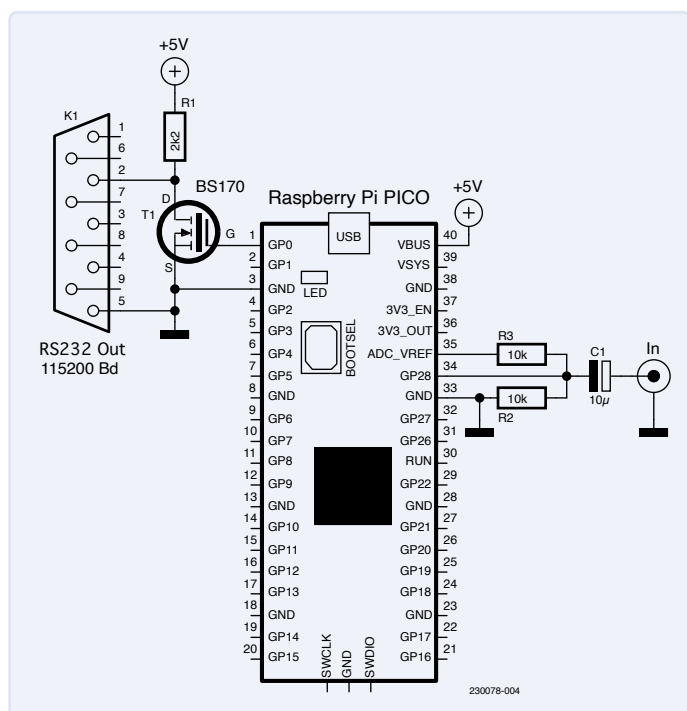
TFD et FFT

Le spectre est calculé à l'aide de la transformée de Fourier discrète (TFD). Cet algorithme prend N échantillons s_n (avec $n = 0$ à $N-1$) du signal d'entrée pour calculer N valeurs de spectre Z_k (avec $k = 0$ à $N-1$). La règle de transformation appliquée est la suivante :

$$Z_k = \sum_{n=0}^{N-1} s_n e^{-j \frac{2\pi k n}{N}} = \sum_{n=0}^{N-1} s_n \left[\cos\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) - j \sin\left(\frac{2\pi k n}{N}\right) \right]$$

La TFD se compose de N nombres complexes. Si le signal d'entrée est réel, comme dans le cas présent, la TFD résultante est symétrique et la règle suivante s'applique :

$$Z_{N-k} = \bar{Z}_k$$



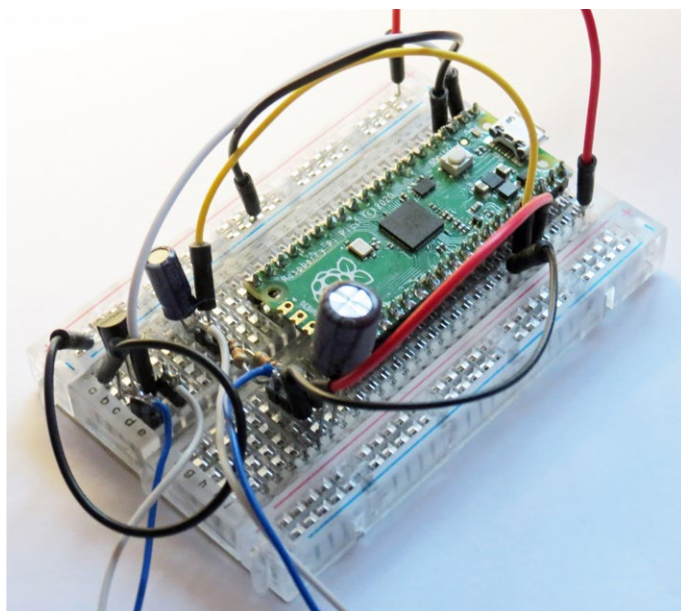


Figure 2. Ma maquette du circuit de la figure 1.

Seules les $N/2$ premières valeurs sont donc pertinentes. Ceci est conforme au théorème d'échantillonnage, selon lequel des valeurs uniques ne sont obtenues que jusqu'à la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Par conséquent, seules les $N/2$ premières valeurs spectrales sont utilisées dans ce qui suit. Le spectre calculé est celui du signal d'entrée S prolongé avec la période N . Afin de comprendre pourquoi la TFD effectue effectivement une analyse spectrale, considérons d'abord comment le signal d'entrée $s_n = \cos(2\pi m n / N)$ est transformé avec, par exemple, $m = 5$ et $N = 16$. Ce signal d'entrée est une oscillation cosinusoidale de fréquence $f_s = m / N$. Les valeurs transformées résultantes sont $Z_m = Z_5 = N/2 = 8$, et les autres valeurs, Z_k , sont toutes nulles. Ainsi, une oscillation de fréquence m devient perceptible exactement dans la $m^{\text{ème}}$ valeur transformée. Si, au lieu du signal cosinus, on transformait un signal sinus, la partie imaginaire de Z_m ne serait pas nulle. Mais que se passe-t-il lorsqu'on transforme un signal composé d'oscillations de différentes fréquences ? Là aussi, c'est simple : La TFD est une transformation linéaire, ce qui signifie que la TFD d'une somme est égale à la somme des TFD des signaux individuels. La formule qui en résulte est la suivante

$$\text{TFD}(u U_n + v V_n) = u \text{TFD}(U_n) + v \text{TFD}(V_n)$$

avec les préfacteurs u et v .

Si le signal d'entrée est composé de plusieurs oscillations $s_n = \cos(2\pi m n / N)$ avec différentes fréquences m , on obtient exactement les oscillations individuelles dans le spectre. Un signal $s_n = A \cos(2\pi m n / N)$ d'amplitude A se traduit par une valeur $Z_m = A N / 2$ dans le spectre. Cette valeur dépend du nombre d'échantillons. Pour l'éliminer, la TFD est mise à l'échelle par un facteur de $2 / N$. Le nouveau spectre a alors les valeurs $W_k = 2 Z_k / N$. Un signal cosinus d'amplitude A donne alors une valeur de spectre d'exactement A . La valeur d'amplitude A est la valeur de crête du signal cosinus. Pour la valeur effective, il faut la diviser par $\sqrt{2}$.

Temps de calcul

Le temps de calcul de la TFD croît quadratiquement avec le nombre N d'échantillons. Il peut donc être assez long lorsque N est élevé. Des mesures effectuées avec le RPi Pico ont conduit à l'approxi-

Table 1: Computing times for different N .

N	TFD en s	FFT en s
256	0,590	0,008
1,024	9,437	0,041
4,096	150,995	0,197
16,384	2415,919	0,918

mation $T_{\text{TFD}} \approx 9 N^2 \mu\text{s}$. Si N est une puissance de deux, vous pouvez utiliser la transformée de Fourier rapide (FFT) au lieu de la TFD, car elle calcule les mêmes valeurs beaucoup plus rapidement. Sur la carte Pico, le temps de calcul est $T_{\text{FFT}} \approx 4 N \log_2(N)$. Le **tableau 1** montre les temps de calcul pour quelques valeurs pratiques de N . Pour une analyse de spectre simple, on utilise souvent $N = 1024$. Le temps de calcul de la TFD serait encore acceptable ici avec environ 9 s, mais la FFT est beaucoup plus rapide avec 40 ms. Il arrive également que l'on utilise $N = 16\,384$, pour lequel la TFD prendrait déjà 40 bonnes minutes – une lenteur inacceptable. La FFT, elle, a besoin de moins d'une seconde ! C'est pourquoi N est toujours choisi comme une puissance de deux pour privilégier la FFT.

Valeur efficace et dBm

En ingénierie des communications, les quantités sont souvent spécifiées en tant que valeurs efficaces. Comme on élève au carré la quantité fonction du temps, qu'on en calcule la moyenne avant d'en prendre la racine carrée, le terme de racine carrée moyenne (RMS) est devenu courant. Pour un signal discret et périodique de période N , comme pour nos signaux TFD, la valeur RMS est calculée comme suit :

$$\text{RMS}_s = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |s_n|^2}$$

Il est également possible de calculer la valeur efficace des valeurs spectrales. On obtient alors :

$$\text{RMS}_Z = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |Z_k|^2} \quad \text{et} \quad \text{RMS}_W = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |W_k|^2}$$

Il est intéressant de noter que la formule suivante s'applique désormais :

$$\text{RMS}_s = \text{RMS}_Z / \sqrt{N} \quad \text{ou} \quad \text{RMS}_s = \sqrt{N} \cdot \text{RMS}_W / 2$$

Cela signifie qu'on peut aussi calculer la valeur efficace dans le domaine fréquentiel au lieu du temporel. Pour cela, il faut seulement prendre en compte le préfacteur. Cette relation est également appelée identité de Parseval [1]. L'énergie dans le domaine temporel est donc reflétée avec précision par la somme des énergies des oscillations individuelles dans le domaine fréquentiel. Les rapports d'énergie ou de puissance sont souvent exprimés en dB dans l'ingénierie des communications. Pour le rapport de puissance

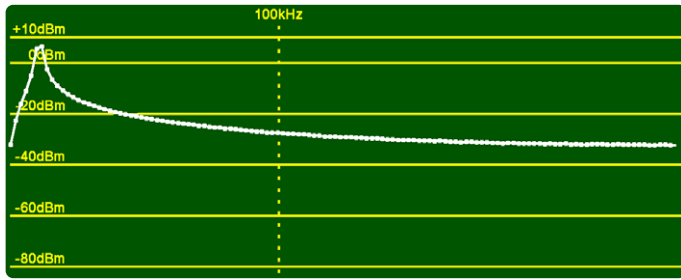


Figure 3. Mauvaise représentation spectrale à une fréquence demi-entière.

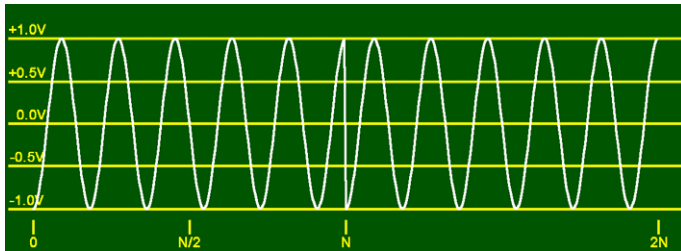


Figure 4. À l'échantillon N, un saut d'amplitude se produit si le signal est prolongé périodiquement.

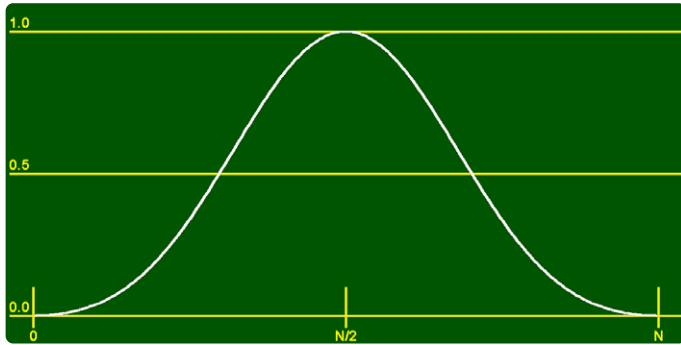


Figure 5. Fonction fenêtre de Blackman.

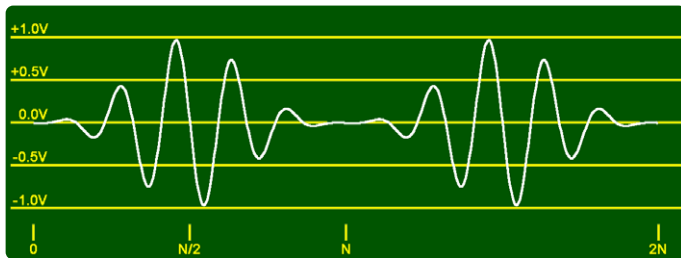


Figure 6. Le signal multiplié par la fonction fenêtre présente une courbe continue aux extrémités.

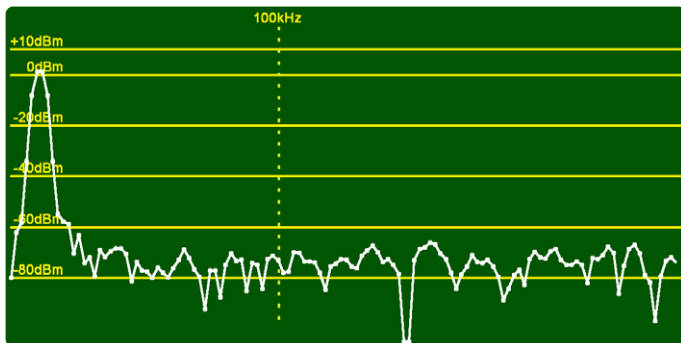


Figure 7. Spectre après application de la fonction fenêtre.

$v = P_1 / P_0$, on obtient $v_{dB} = 10 \log_{10} (P_1 / P_0)$. Pour les niveaux absolus, le niveau de référence $P_0 = 1 \text{ mW}$ est courant. On obtient alors $P_{dBm} = 10 \log_{10} (P / 1 \text{ mW})$. Si l'on veut spécifier des tensions U en dBm, on utilise la puissance P au niveau d'une résistance de $R = 50 \Omega$, à laquelle est appliquée la tension U_{RMS} . La puissance dissipée par la résistance étant $P = U^2 / R$, on obtient $U_{dBm} = 10 \log_{10} (U_{RMS}^2 / R / 1 \text{ mW})$.

Pour l'analyseur de spectre décrit ici, l'axe Y est gradué en dBm, la représentation logarithmique habituelle pour les analyseurs de spectre, mais attention : en ingénierie audio, les dBm se réfèrent souvent à une résistance de 600Ω .

Signaux et fenêtres

Jusqu'à présent, nous avons considéré des signaux d'entrée qui s'inscrivaient exactement dans une fenêtre de N valeurs. La fréquence m du signal $s_n = A \cos(2 \pi m n / N)$ était donc un nombre entier. La **figure 3** montre le spectre à $m = 5,5$ et $N = 256$.

En fait, on s'attendrait à un spectre linéaire car le signal ne contient qu'une seule fréquence. Au lieu de cela, on obtient un spectre qui chute lentement de part et d'autre des valeurs maximales. Ce spectre est, bien entendu, inexploitable pour un analyseur de spectre. La raison en est que le signal périodique continu (de période N) présente un saut à ses extrémités. On le voit clairement dans le diagramme amplitude/temps de deux périodes de la **figure 4** : à l'échantillon N , le signal passe de $+1 \text{ V}$ à -1 V . Ce saut génère des composantes spectrales à haute fréquence au-delà de la fréquence du signal. Pour éviter ces effets, on applique la technique de la fenêtre, qui équivaut en principe à superposer une enveloppe. Il s'agit de multiplier le signal d'entrée par une fonction fenêtre, qui le réduit progressivement à l'amplitude 0 aux limites de la fenêtre, mais ne le modifie pas beaucoup ailleurs. La **figure 5** montre la fonction fenêtre utilisée.

La **figure 6** montre deux périodes du signal multiplié par la fonction fenêtre. On voit clairement comment le signal est modulé en amplitude, de sorte qu'il ne saute pas aux extrémités de la période ($0, N, 2N \dots$), mais se déroule de manière continue. Il existe différentes fonctions fenêtre, chacune présentant des avantages et des inconvénients différents. Le listage en langage C suivant montre comment on calcule la fenêtre de Blackman (trois termes) utilisée ici :

```
double windowFun(int k) {
    double alpha=0.16;
    double a0=(1-alpha)/2;
    double a1=0.5;
    double a2=alpha/2;
    return a0-a1*cos(2*PI*k/(N-1))+a2*cos(4*PI*k/(N-1));
}
```

La fonction fenêtre est composée de deux fonctions cosinus. Après application de la fenêtre, la FFT donne le spectre de la **figure 7**. Le maximum spectral occupe quatre intervalles (appelés bins) autour de $m = 5,5$ et diminue ensuite de manière significative. Avec des valeurs plus élevées pour N , l'élargissement du spectre est tout à fait acceptable et l'on obtient de bons spectres linéaires.

Toutefois, on doit tenir compte du fait que la fonction fenêtre réduit l'amplitude du signal. En tant que facteur de fenêtre, on peut approximer en utilisant la moyenne arithmétique des valeurs de la fonction fenêtre, comme dans le listage suivant.

```
float getWindowFactor() {
    float mean=0;
    for (k=0; k < N ; k++) {
        mean += abs(windowFun(k));
    }
    return mean/N ;
}
```

Pour compenser la réduction de l'amplitude, nous divisons le spectre par le facteur de fenêtre après avoir calculé la FFT. Lorsqu'on utilise une fonction fenêtre, l'identité de Parseval ne s'applique plus.

Options de l'analyseur

L'analyseur de spectre offre plusieurs options configurables. Dans la configuration la plus simple, le μC échantillonne le signal, calcule le spectre, l'émet et répète l'opération à l'infini. La fréquence d'échantillonnage f_s est égale à la fréquence d'échantillonnage. Elle définit en même temps la plage de fréquence du spectre puisqu'elle va en principe de 0 à $f_s/2$. Ainsi, à 500 kHz, on peut analyser des composantes de fréquence jusqu'à 250 kHz. La longueur du signal N détermine le nombre d'échantillons utilisés pour le spectre et définit donc la résolution de la FFT. Deux lignes spectrales adjacentes (bins) sont espacées de $\Delta = f_s/N$. À 500 kHz et $N = 1024$, la résolution est $\Delta = 500 \text{ kHz} / 1024 \approx 488 \text{ Hz}$. Ce qui suffit pour traiter les signaux RF de radiodiffusion.

Lors de l'analyse de signaux comportant des composantes de bruit, les spectres individuels sont souvent très irréguliers. On peut améliorer cette situation en calculant la moyenne des spectres successifs. Cette procédure est activée par l'option « MEAN » du logiciel de l'analyseur, qu'on peut télécharger gratuitement sur le site Internet d'Elektor à l'adresse [2]. Le spectre de l'émetteur de signaux temporels DCF77 permet de voir l'intérêt du moyennage. Ici, la fréquence d'échantillonnage est de 250 kHz et N vaut 16 384. La **figure 8** montre le spectre résultant dans la plage de $\pm 5 \text{ kHz}$ autour de la fréquence centrale de 77,5 kHz.

La fine ligne blanche montre un spectre unique manifestement bruité. Le calcul de la moyenne (courbe verte épaisse) montre clairement que la DCF77 a un spectre de bruit. En effet, la DCF77 transmet les données avec un bruit pseudo-aléatoire à un débit binaire de $77,5 \text{ kHz} / 120 \approx 645,8 \text{ Hz}$, en plus de la modulation d'amplitude (bande très étroite). La largeur de bande de $\pm 645,8 \text{ Hz}$ est représentée par les deux lignes verticales.

Analysons ensuite le spectre de l'émetteur EFR (129,1 kHz). EFR transmet des données RTTY avec un décalage de $\pm 170 \text{ Hz}$ et un débit de 200 Bd. Ainsi, deux lignes spectrales devraient être visibles dans le spectre, à 128,93 kHz et 129,27 kHz. Cependant, étant donné que seuls des messages courts sont envoyés avec de longues pauses entre eux, la fréquence à $+170 \text{ Hz}$ n'apparaît que rarement et est donc difficile à détecter. Le logiciel propose à cet effet la fonction MAXHOLD, qui permet de calculer le maximum des spectres sur

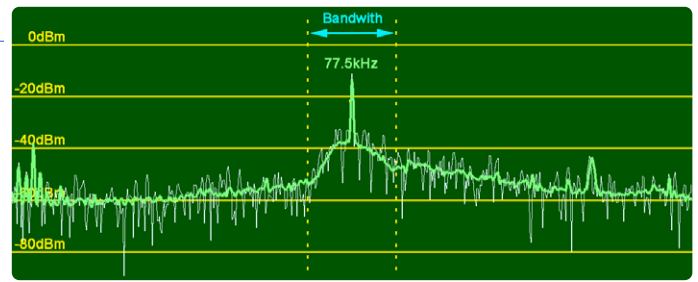


Figure 8. Le spectre de DCF77 « normal » (blanc) et son spectre moyenné (vert).

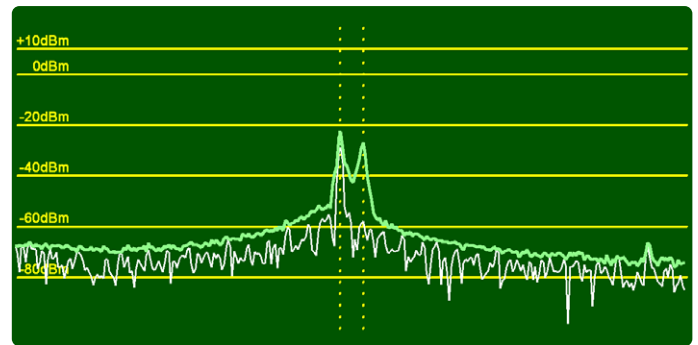


Figure 9. Spectre de DCF49 (EFR à 129,1 kHz) avec la fonction MAXHOLD.

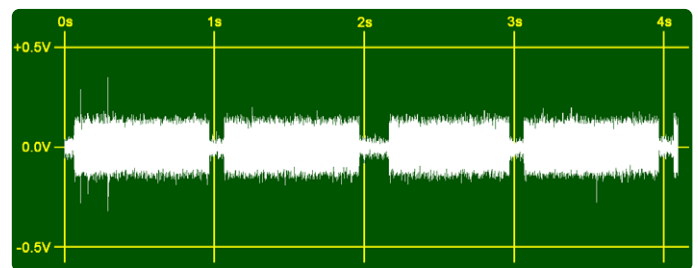


Figure 10. Amplitude en fonction du temps du signal DCF77.

un grand nombre de spectres. De cette manière, les composantes spectrales apparaissant brièvement à 129,27 kHz sont plus visibles (voir **figure 9**).

La fine ligne blanche est un spectre unique. Comme il n'y a pas de message en cours d'émission, seul le pic à 128,93 kHz est visible. Le spectre MAXHOLD est représenté par la courbe verte plus épaisse. Les deux pics à $129,1 \text{ kHz} \pm 170 \text{ Hz}$ (au niveau des lignes verticales pointillées) sont clairement visibles. Pour obtenir un spectre aussi finement résolu, de nombreux échantillons sont nécessaires avec $N = 16\,384$. La fréquence d'échantillonnage est de 500 kHz et la résolution, en conséquence, est $\Delta = 500 \text{ kHz} / 16\,384 \approx 30,5 \text{ Hz}$. Ainsi, les deux lignes spectrales ne sont qu'à $340 \text{ Hz} / 30,5 \text{ Hz} \approx 11$ échantillons de fréquence l'une de l'autre.

Domaine temporel (fonction d'oscilloscope)

Bien entendu, le signal dans le domaine temporel est également instructif, ne serait-ce que pour contrôler l'étendue de la plage d'acquisition du CA/N. Le logiciel peut également le faire en affichant simplement le signal échantillonné. La **figure 10** montre une sorte d'oscillogramme du signal DCF77 à 77,5 kHz.

Étant donné que les chutes de la porteuse se produisant toutes les secondes sont particulièrement intéressantes, il est conseillé de choisir une fréquence d'échantillonnage plus faible et un nombre

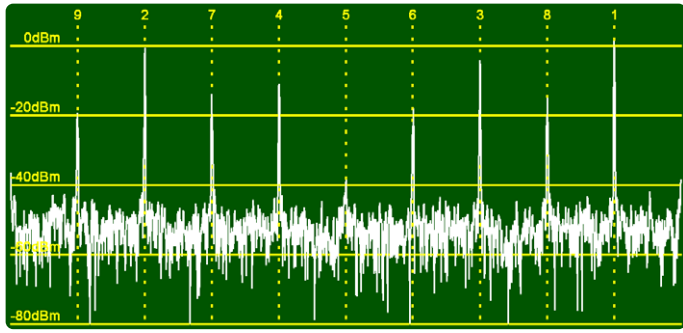


Figure 11. Sous-échantillonnage d'un signal carré de 225 kHz avec $f_s = 500$ kHz. Un certain nombre de lignes spectrales apparaissent à $f_k = 225 \text{ kHz} * k$ avec $k = 1, 2, 3...$

d'échantillons plus élevé. Pour la représentation de la figure 10, on a choisi $f_s = 4$ kHz et $N = 16\,384$. La fenêtre temporelle a donc une taille de $T_s = N/f_s \approx 4$ s, ce qui se traduit par quatre arrêts de la porteuse dans la figure 10. Le signal de 77,5 kHz est fortement sous-échantillonné, mais ce n'est pas un problème, car seule l'amplitude est importante ici.

Théorème d'échantillonnage

Selon le théorème d'échantillonnage, les signaux à analyser ne peuvent contenir des fréquences que jusqu'à un maximum de la moitié de la fréquence d'échantillonnage. Soit on respecte cette règle, soit on ajoute un filtre passe-bas approprié avant le CA/N. Jusqu'à présent, aucun filtre approprié n'a été proposé, car il dépend toujours de l'application spécifique. En outre, il est également intéressant d'étudier les conditions d'analyse des fréquences plus élevées. Si nous échantillonnons des signaux avec des impulsions infiniment courtes (Dirac), nous obtenons un spectre périodique avec une période égale à l'intervalle d'échantillonnage. Les lignes spectrales contenues dans le signal sont donc répétées périodiquement avec la largeur f_s . Par conséquent, des fréquences plus grandes que f_s apparaissent également dans le spectre. Elles sont pour ainsi dire « repliées » dans l'intervalle fondamental. Si la distance d'échantillonnage est plus longue, les fréquences plus élevées sont atténuées plus fortement. Les relations sont illustrées dans l'exemple suivant : la fréquence d'échantillonnage f_s est de 500 kHz. On analyse un signal carré d'une fréquence de 225 kHz et d'un rapport cyclique de 10 %.

Dans le spectre de la **figure 11**, l'onde fondamentale à 225 kHz apparaît le plus à droite et a le niveau le plus élevé. La première harmonique ($k = 2$) a la fréquence $2 * 225 \text{ kHz} = 450 \text{ kHz}$, ce qui est déjà au-delà de $f_s/2$. En raison de la symétrie, elle apparaît donc à $f = 500 \text{ kHz} - 450 \text{ kHz} = 50 \text{ kHz}$ dans le spectre sous la ligne verticale pointillée étiquetée « 2 » avec une amplitude encore considérable. La fréquence pour 9 est égale à $225 \text{ kHz} * 9 = 2025 \text{ kHz}$. Comme cela équivaut à $4 * 500 \text{ kHz} + 25 \text{ kHz}$, ce pic à 25 kHz apparaît à l'extrême gauche du spectre, sous la ligne du curseur intitulée « 9 ». Les indices de la ligne de curseur $k = 1...9$ représentent les positions théoriques attendues des harmoniques du signal analysé avec des fréquences de $k * 225 \text{ kHz}$, connues sous le nom de « fréquences repliées ». Bien que les fréquences aillent jusqu'à plus de 2 MHz, dix pics apparaissent dans la fenêtre qui s'étend jusqu'à 250 kHz. Cela signifie que le CA/N peut certainement traiter des fréquences plus élevées que $f_s/2$. Cet effet est utilisé dans ce que l'on appelle le sous-échantillonnage. Avant l'échantillonnage, le signal peut être filtré par un filtre passe-bande avec une bande passante de $f_s/2$ pour que seules les zones pertinentes du spectre soient capturées. Pour ce faire, il faudrait ajouter une fonction d'échantillonnage

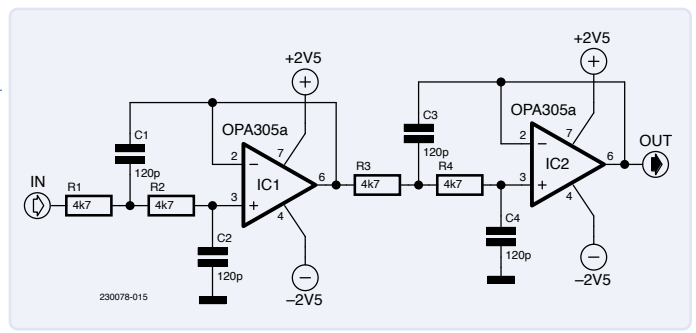


Figure 12. Filtre anti-repliement utilisant deux filtres de Sallen-Key du deuxième ordre et une fréquence de coupure de 280 kHz.

rapide et de maintien à l'installation afin de pouvoir quand même traiter les hautes fréquences avec le CA/N. Si toutefois cet effet était gênant, il faudrait filtrer le signal à l'aide d'un filtre passe-bas (filtre anti-repliement) afin de supprimer les composantes du signal à haute fréquence avant l'échantillonnage.

Filtre anti-repliement

L'effet d'un filtre passe-bas anti-repliement est démontré ci-dessous. Ici, un signal carré symétrique de 225 kHz avec un rapport cyclique de 50 % est filtré à travers le filtre passe-bas illustré à la **figure 12** avant le CA/N. Le filtre a été simulé avec LTspice [3] et construit avec des ampli-op du type OPA2350.

Le spectre du signal filtré de la **figure 13** montre clairement que les harmoniques sont fortement atténuées et que seule l'onde fondamentale de 225 kHz se détache nettement au-dessus de -40 dBm. Cependant, notre filtre atténue déjà fortement à 225 kHz. Un filtre aux extrémités plus abruptes serait donc plus approprié.

Bruit et ENOB

Jusqu'à présent, seuls les signaux composés d'oscillations sinusoïdales individuelles de fréquences et d'amplitudes différentes ont été étudiés. Dans la pratique, cependant, il existe aussi des signaux de bruit avec différentes largeurs de bande. Leur traitement en termes d'ingénierie des communications n'est pas vraiment trivial, c'est pourquoi seuls des cas simples sont décrits. À titre d'exemple, des valeurs de bruit n_k avec une amplitude A sont générées pour un bruit binaire avec une fréquence de bruit f_n . Dans chaque cas, un dé est lancé pour déterminer si $s_k = +A$ ou $s_k = -A$ doit s'appliquer à la valeur suivante. Au départ, $f_n = 1 \text{ MHz}$ s'applique, de sorte que les valeurs sont générées plus rapidement que le CA/N ne peut les échantillonner. Les échantillons sont donc indépendants les uns des autres et la valeur est $\pm A$ à chaque fois. Par conséquent, le signal de bruit est presque « blanc », ce qui signifie que toutes les fréquences sont présentes de manière égale dans son spectre.

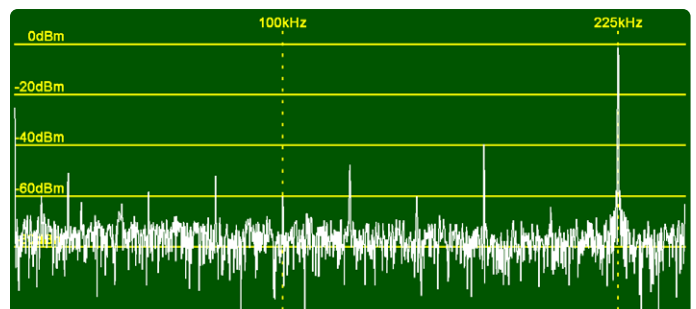


Figure 13. Spectre du signal carré après anti-repliement.

Le signal est généré par un logiciel sur le RPi Pico. Pour que cette tâche puisse être exécutée en parallèle avec le logiciel de l'analyseur de spectre, elle utilise le deuxième cœur de l'UC RP2040. Elle est implémentée à l'aide d'une machine à états PIO, qui permet de générer jusqu'à 125 Mb/s.

En règle générale, on utilise la valeur RMS de la tension de bruit. Comme le signal n'est pas périodique, nous ne pouvons pas utiliser formellement la formule pour la RMS. Cependant, pour un grand nombre d'échantillons M , la valeur RMS peut être approchée avec :

$$RMS_n \approx \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} n_k^2}$$

Pour un bruit binaire, on peut donc facilement calculer la valeur RMS. Comme chaque échantillon a la valeur absolue A , nous obtenons l'équation simple $RMS_n = A$. Soit, dans la configuration d'essai, $A = 750 \text{ mV}$. La **figure 14** montre un exemple de ce signal et la **figure 15** montre le spectre associé. La fine ligne rouge est un spectre unique. Elle est très irrégulière parce qu'elle ne représente qu'une seule instance du spectre. La ligne verte épaisse est le résultat du calcul de la moyenne de nombreux spectres (fonction MEAN) et montre plus clairement qu'il s'agit d'un bruit blanc à un certain niveau.

Si nous examinons les spectres de bruit avec différentes longueurs de signal N , nous pouvons voir que le niveau affiché dépend également de N . La relation suivante existe entre la valeur efficace, le niveau affiché et N : pour un grand N , la règle suivante s'applique : $RMS_s \approx RMS_n$. En raison de l'identité de Parseval (voir ci-dessus), la relation suivante s'applique également :

$$RMS_w = 2 RMS_s / \sqrt{N}$$

Ainsi, l'énergie dans

$$RMS_w = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |w_k|^2}$$

sera répartie uniformément sur w_k . Pour simplifier, on suppose que tous les w_k sont de taille égale et qu'ils sont égaux à w . En rassemblant tout cela, nous obtenons : $w^2 = 4 RMS_n^2 / N$. Ici, w est exactement la puissance recherchée du signal de bruit dans le spectre. Dans la **figure 15**, ce niveau est représenté par une ligne violette épaisse. Il s'agit en fait d'une très bonne prédiction du niveau de bruit réel. On comprend également pourquoi ce niveau diminue lorsque N augmente : c'est parce que l'énergie du bruit est répartie sur un plus grand nombre de lignes spectrales.

Dans l'exemple suivant, le débit binaire de la source de bruit est réduit à $f_n = 25 \text{ kHz}$. Par conséquent, 20 échantillons successifs sont toujours égaux, ce qui équivaut à une sorte de filtrage passe-bas. Le spectre résultant est illustré à la **figure 16**.

La fine ligne rouge montre à nouveau la fonction avec un seul spécimen. Le spectre moyen est représenté en vert. Le premier point zéro du spectre se situe à 25 kHz. Le spectre est proportionnel à $H(f) = \text{si}(\pi f / f_n)$, où $\text{si}(x) = \sin(x) / x$ est ce que l'on appelle la fonction sinus cardinal. En simplifiant, on peut calculer le niveau autour de

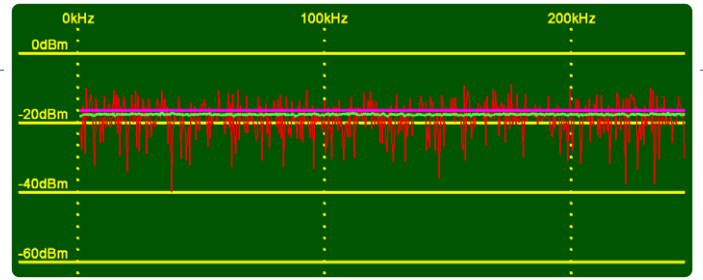


Figure 14. Bruit binaire sous forme de signal dans le domaine temporel avec une amplitude de $\pm 750 \text{ mV}$.

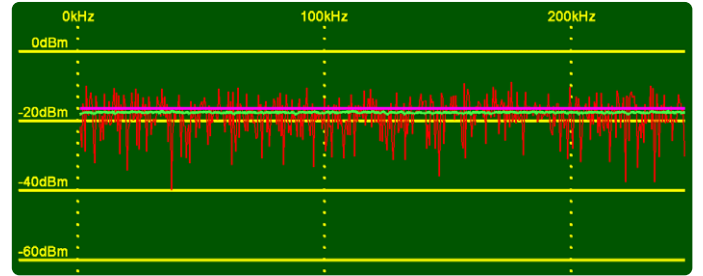


Figure 15. Spectre du bruit binaire de la figure 14.

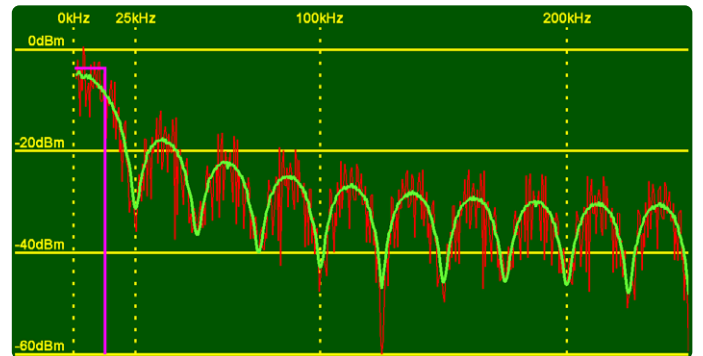


Figure 16. Spectre du bruit à un débit binaire de 25 kHz.

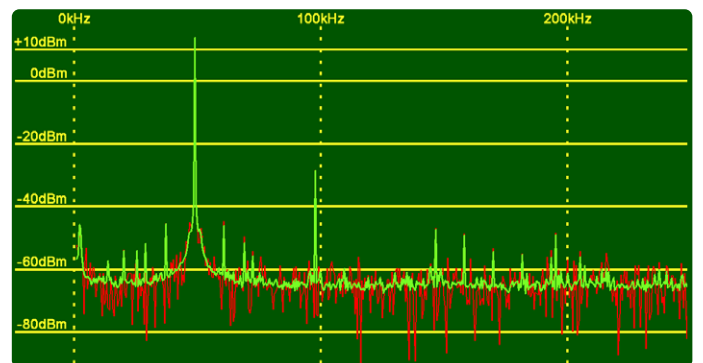


Figure 17. Spectre d'un signal sinusoïdal de 48 828 kHz à une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz.

o comme suit : La largeur de bande est d'environ $f_{BW} = 12,5 \text{ kHz}$, ce qui équivaut à $k_{BW} = N f_{BW} / f_s = 25$ lignes spectrales.

Si le spectre a une largeur de bande constante de w , l'équation $RMS_w^2 = 2 k_{BW} w^2 / N$ est obtenue pour les valeurs RMS en additionnant les lignes spectrales dans la largeur de bande. Le facteur 2 est nécessaire car la FFT fournit un spectre symétrique avec les lignes spectrales $N - k_{BW}$ à N . En utilisant l'identité de Parseval, la puissance spectrale w est calculée comme suit : $w^2 = 2 RMS_n^2 / k_{BW}$.

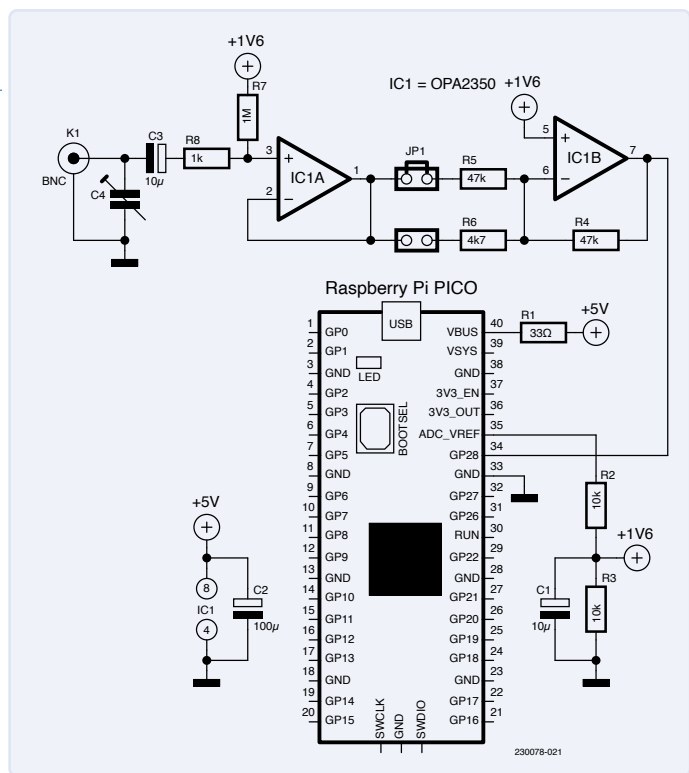


Figure 18. Préamplificateur avec une résistance d'entrée de 1 MΩ. Pour IC1, il est possible d'utiliser des amplificateurs optoélectroniques AD823 ou MCP602.

Elle est représentée à la **figure 16** par la ligne violette épaisse et correspond assez bien au spectre courant.

L'exemple suivant est un peu plus pratique : le CA/N reçoit le signal d'un générateur sinusoïdal d'amplitude $3 V_{SS}$ (environ 14 dBm). La fréquence du signal $f_s = 48,828 \text{ kHz}$ correspond exactement à la 100^{ème} ligne spectrale. La **figure 17** montre le spectre obtenu. La ligne spectrale à f_s est bien visible et a également une taille correcte. À $2 f_s$, on peut voir la première harmonique causée par le générateur de signal avec un niveau d'environ 45 dB en dessous du signal. De nombreuses petites lignes spectrales sont également visibles, car les composants ne sont pas idéaux et présentent par exemple de petites non-linéarités. Le niveau de bruit est également intéressant. Le spectre moyen (vert) montre clairement qu'il est d'environ -65 dBm. Avec la formule donnée ci-dessus, nous pouvons convertir le niveau en tension de bruit effective d'environ 2 mV_{RMS} (environ 5 mV_{SS}). La résolution du CA/N est de $3,3 \text{ V} / 4096 = 0,8 \text{ mV}$. Le bruit couvre donc environ six niveaux de quantification. Plus de 2 bits sont donc perdus à cause du bruit. Néanmoins, les pics spectraux à -55 dBm se détachent bien du bruit. La plage dynamique est donc d'au moins $14 \text{ dBm} - (-55 \text{ dBm}) = 69 \text{ dB}$ - un facteur de ≈ 2800 . La résolution réelle ou le nombre effectif de bits (ENOB) du CA/N atteint plus de 11 grâce au moyennage, ce qui n'est pas mal du tout. À noter que les expérimentations sur le bruit ont été réalisées sans fenêtrage afin que les niveaux soient conservés exactement et que l'identité de Parseval soit applicable.

Préamplificateur avec entrée 1 MΩ

Les oscilloscopes ont généralement une résistance d'entrée de 1 MΩ. Cela signifie qu'ils n'imposent normalement pas de charge significative aux objets de mesure et permettent d'utiliser les sondes 1:1 et 10:1 habituelles. Cette commodité devrait également être offerte par un analyseur de spectre, raison pour laquelle a été conçu le préamplificateur de la **figure 18**.

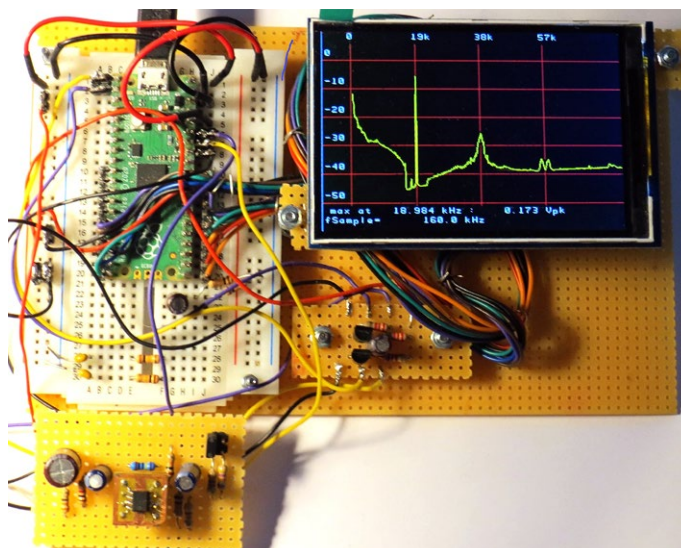


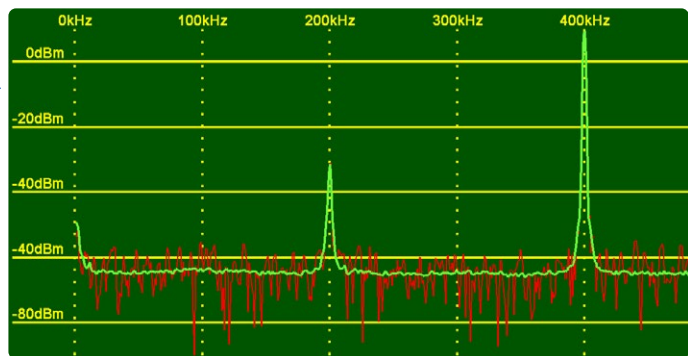
Figure 19. Analyseur composé d'une carte Pico avec écran LCD et d'un préamplificateur de 1 MΩ, montrant un signal multiplex VHF.

L'amplificateur IC1A agit comme un convertisseur d'impédance. L'impédance d'entrée est déterminée par R7. IC1B agit comme un préamplificateur avec un gain de 1 ou 10 sélectionnable via JP1. IC1A doit avoir un faible courant de polarisation, sinon ce courant au niveau de R7 provoquerait une chute de tension trop importante, ce qui éloignerait la ligne zéro du signal du centre de la plage d'acquisition du CA/N. Par exemple, le type AD8042 avec son courant de polarisation $I_B = 1,2 \mu\text{A}$ entraînerait un décalage de $1,2 \mu\text{A} * 1 \text{ M}\Omega = 1,2 \text{ V}$. La figure 18 montre des d'ampli-op de type approprié. Si nécessaire, l'adaptation d'une sonde peut être réalisée avec C4. La **figure 19** montre le prototype construit sur une platine avec la carte Pico et l'écran.

Horloge et fréquence d'échantillonnage du CA/N

Selon la fiche technique, l'horloge du CA/N doit être de 48 MHz. Cette horloge est normalement générée par la PLL USB. Le prédiviseur sur 16 bits n'est pas activé dans ce cas (division par 1). Le CA/N fonctionne en *mode libre*, c'est-à-dire qu'il acquiert et émet des valeurs en continu. La synchronisation est assurée par un compteur du CA/N qui est déclenché par son horloge. Le compteur du CA/N déborde à la valeur $CA/NclkDiv$ et redéclenche alors le CA/N. Étant donné qu'une conversion nécessite 96 impulsions d'horloge, on doit respecter $CA/NclkDiv \geq 96$. À la plus petite valeur de $CA/NclkDiv = 96$, nous obtenons la fréquence d'échantillonnage la plus élevée de $f_s = 48 \text{ MHz} / 96 = 500 \text{ kHz}$. Le compteur du CA/N est un compteur fractionnaire 16:8 : La partie entière a une largeur de 16 bits que vous pouvez diviser par fractions de 8 bits pour produire des fréquences d'échantillonnage même peu communes aussi précisément que possible. La fréquence d'échantillonnage la plus lente est $f_s = 48 \text{ MHz} / 65536 = 732 \text{ Hz}$.

Dans l'expérience suivante, le CA/N est utilisé bien au-delà de sa spécification pour une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz. Pour cela, l'horloge du CA/N doit être de 96 MHz. L'horloge PLL de l'USB avec ses 48 MHz n'est pas suffisante. Le CA/N est donc cadencé par la PLL de l'horloge système SYS-PLL. La fréquence d'horloge générée pour le processeur est normalement de 125 MHz. Cependant, si elle est réglée sur 96 MHz, on peut l'utiliser pour cadencer directement le CA/N et permettre une fréquence d'échantillonnage de 1 MHz. Malheureusement, le processeur fonctionne alors environ 23% plus lentement. Ce n'est toutefois pas un problème,



car le logiciel n'utilise de toute façon pas le processeur au maximum de ses capacités.

Un signal sinusoïdal de 400 kHz avec une amplitude de 2 VSS est utilisé comme signal de test. La **figure 20** montre le spectre obtenu. Le signal utile est représenté avec le niveau correct à la position correcte. Cependant, la première harmonique à 800 kHz est repliée à $1\text{ MHz} - 800\text{ kHz} = 200\text{ kHz}$. Le niveau de bruit de -65 dBm n'est pas pire qu'à une fréquence d'échantillonnage de 500 kHz. Il ne semble donc pas y avoir d'objection sérieuse à cadencer le CA/N à 96 MHz.

LCD

Comme les détails fins sont souvent intéressants dans les spectres, on a choisi le shield Arduino MAR3502 en raison de sa résolution relativement élevée de 320×480 pixels. Il est connecté en parallèle à la carte Pico, comme le montre la **figure 21**. Cela permet de configurer un analyseur de spectre comme un appareil autonome, mais il manque toujours des commandes.

La **figure 20** montre le spectre d'un signal audio FM multiplex sur l'écran. Vous pouvez clairement voir le signal mono (G+D) dans la gamme à 17 kHz. À 19 kHz, la ligne spectrale de la tonalité pilote stéréo apparaît. À 38 kHz, le spectre du signal de différence stéréo (G - D) est visible. À 57 kHz, le spectre du signal RDS est visible, composé de deux bandes latérales autour de 57 kHz.

CA/N 12 bits, 50 MHz

Pour les basses fréquences, la fréquence d'échantillonnage de 500 kHz du CA/N intégré dans le RP2040 suffit, mais il existe également des spectres intéressants dans la gamme des radiofréquences. Pour cela, la carte Pico peut être complétée par un CA/N externe rapide utilisant la puce ADS807E. Avec ce CA/N 12 bits, il est possible d'obtenir jusqu'à 53 MHz. Pour les spectres, vous avez besoin d'une grande puissance de calcul et donc de quelques astuces pour atteindre cette fréquence d'échantillonnage élevée. L'ADS807E fournit commodément une tension de référence intégrée. Le CA/N est connecté à la carte Pico comme le montre la **figure 22**.

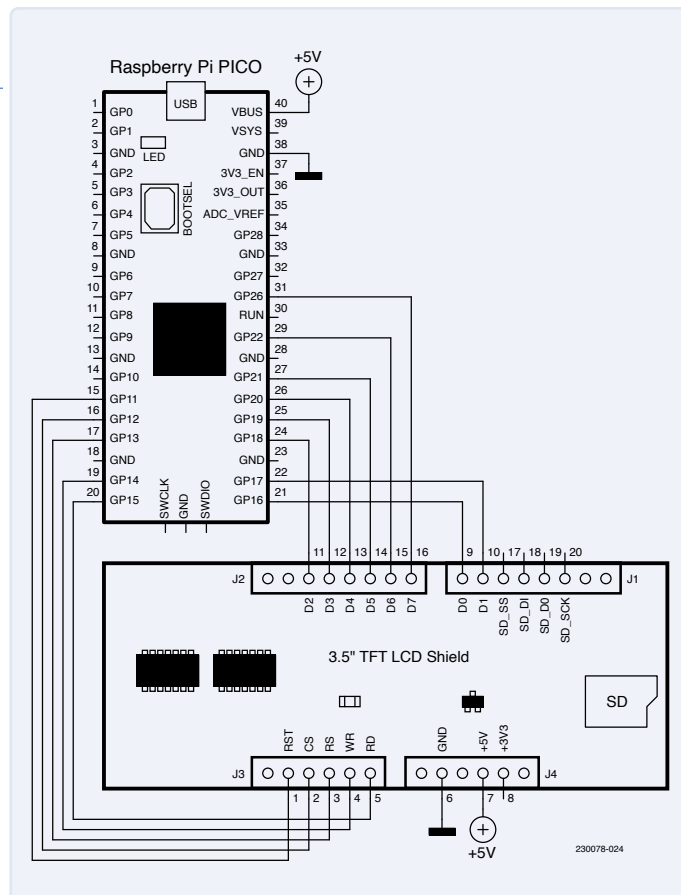


Figure 21. Connexion parallèle d'un écran LCD 3,5" 480×320 pixels à la carte Pico.

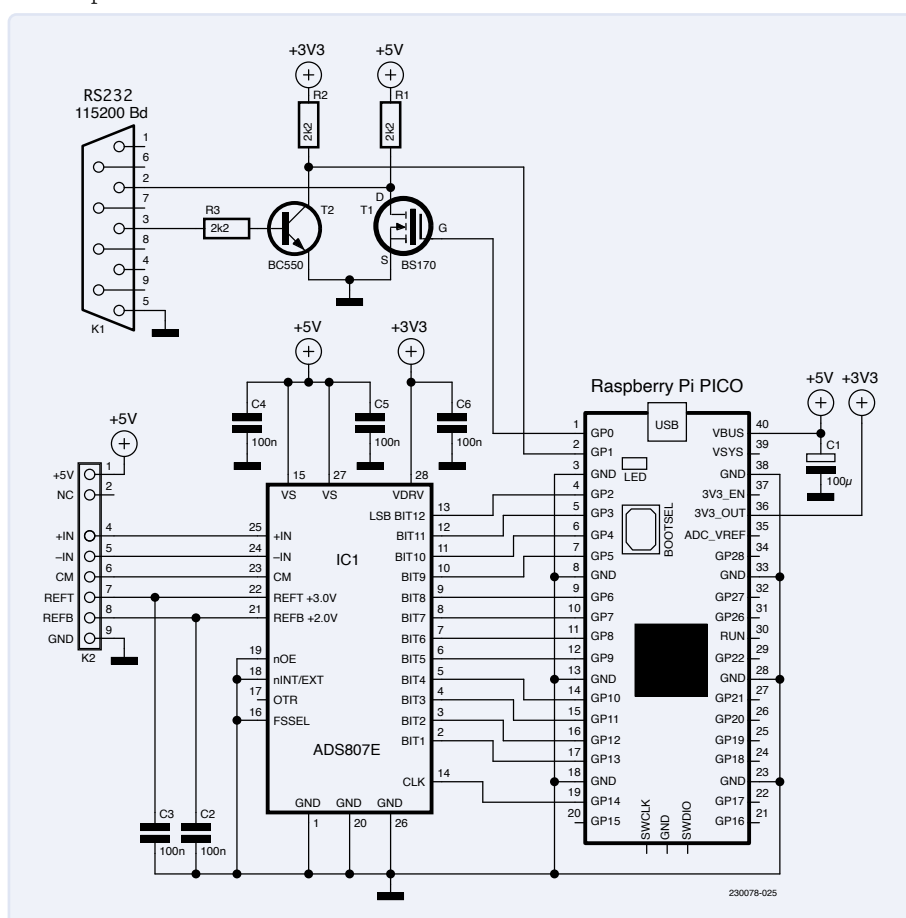


Figure 22. Connexion du CA/N externe ADS807 à la carte Pico.

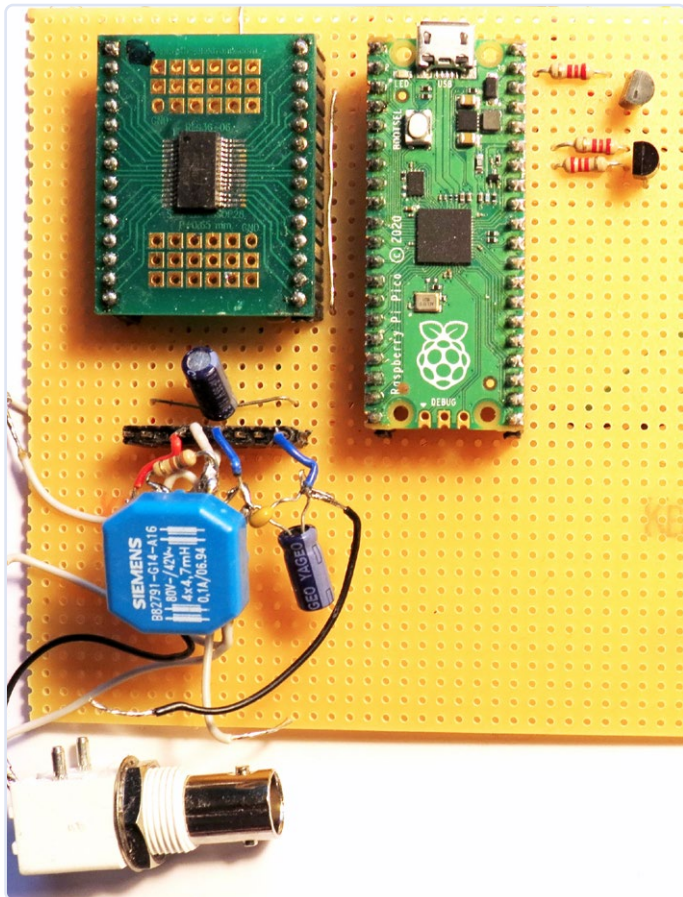


Figure 23. Carte Pico supplémentaire avec ADS807&

En raison de la connexion parallèle, de nombreuses broches GPIO sont occupées, et il n'est donc malheureusement pas possible de connecter le LCD en même temps. Pour cette raison, l'ADS807 reçoit une deuxième carte Pico. Lors des premières expérimentations, les données sont traitées et affichées à l'aide du PC, comme au début. Différents frontaux analogiques, présentés ci-dessous, peuvent être connectés à K2. La **figure 23** montre la configuration de test d'une carte Pico avec un ADS807 et un transformateur 50 Ω .

Au passage, si l'ADS807 est trop cher ou si vous n'avez pas besoin de ses 12 bits, vous pouvez utiliser un CA/N 8 bits bon marché tel que l'ADS830E. Il offre des fréquences d'échantillonnage allant jusqu'à 60 MHz et ne nécessite qu'une routine d'échantillonnage adaptée.

Échantillonnage rapide via PIO, FIFO et DMA

L'UC du RP2040 est normalement cadencée à 125 MHz. Le listage suivant montre la boucle minimale permettant d'acquérir N valeurs de données :

```
for (k = 0; k < N; k++) {
    sampleBuffer[k] = gpio_get_all();
    gpio_put(ADCClock,0);
    gpio_put(ADCClock,1);
}
```

D'après mes mesures, l'UC du RP2040 atteint un maximum de 15 MHz, ce qui est encore loin des 53 MHz d'un ADS807. Cependant, l'UC dispose d'une caractéristique spéciale, une unité d'entrée-sortie périphérique (PIO), qui consiste en huit automates d'états programmables. Ces automates d'états peuvent être commandés par l'horloge de l'UC et programmés à l'aide de commandes simples. Dans

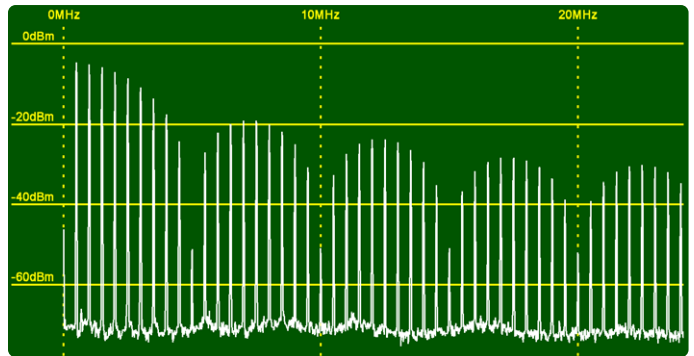


Figure 24. Spectre d'un signal carré de 500 kHz avec un rapport cyclique de 10 %.

ce qui suit, certains aspects de l'application d'échantillonnage sont mis en évidence. Les détails complets étant assez complexes, veuillez-vous référer à la documentation du RP2040 [4]. Le programme PIO ne comporte que deux commandes :

```
.wrap_target
    in pins,12    side 0b0
    nop          side 0b1
.wrap
```

Les mots-clés `.wrap_target` et `.wrap` entraînent l'exécution sans fin, l'une après l'autre, des deux instructions qui les séparent. La boucle elle-même ne surcharge pas le processus. La commande `in` entraîne le déplacement de 12 bits du CA/N vers le registre de décalage d'entrée (ISR). Comme nous le savons, l'instruction `nop` ne fait rien. Après chaque instruction, l'option `side` est utilisée. Cette option permet d'agir sur les broches GPIO parallèlement à la commande PIO proprement dite. L'horloge du CA/N est ainsi générée sur GPIO14. Comme chaque instruction nécessite un cycle, ce programme peut, en principe, traiter 125 / 2 MHz, ce qui est suffisant pour l'ADS807. Outre le programme proprement dit, la configuration de la machine à états joue un rôle important. Elle définit, par exemple, quelles broches sont affectées par le `side-set`. En outre, elle a été configurée pour que, tous les deux échantillons (lorsque 24 bits sont arrivés dans l'ISR), la valeur de l'ISR soit recopiée dans une FIFO de sortie. Les données sont rapidement écrites en mémoire via un accès direct (DMA). L'échantillonnage proprement dit se déroule donc de manière totalement autonome. L'unité centrale doit seulement récupérer les valeurs de la mémoire tampon après chaque transfert DMA.

En principe, on peut utiliser pour le CA/N intégré le même logiciel

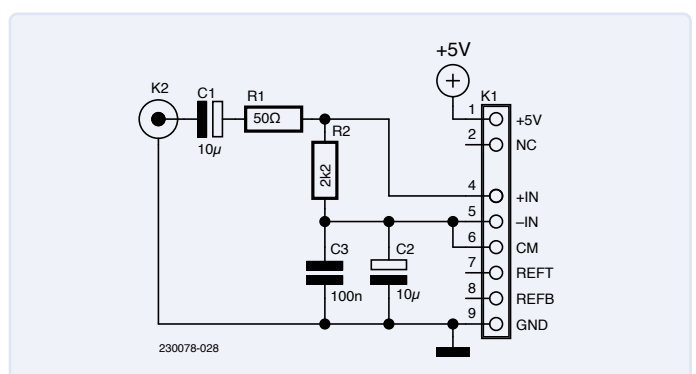


Figure 25. Frontal asymétrique.

que celui utilisé pour le CA/N ADS807. Seule la routine d'échantillonnage doit être adaptée. Pour atteindre la fréquence d'échantillonnage maximale de 53 MHz, par exemple, vous pouvez configurer une horloge UC de 106 MHz et régler le prédiviseur PIO sur 1. Le programme PIO s'exécute alors à 106 MHz. Comme chaque échantillon nécessite deux horloges, la fréquence d'échantillonnage est exactement de 53 MHz. Malheureusement, l'horloge de l'UC est alors 15 % plus lente que d'habitude. Toutefois, cela suffit pour réaliser sans problème les tâches imparties.

La figure 24 montre le spectre d'un signal carré avec un rapport cyclique de 10 % à une fréquence d'échantillonnage de 50 MHz. Les harmoniques jusqu'à 25 MHz sont clairement visibles. En raison du rapport cyclique de 10 %, toutes les 10^{èmes} harmoniques sont absentes. Grâce au sous-échantillonnage, l'ADS807 permet d'analyser sans problème les composantes du signal jusqu'à environ 200 MHz.

Frontaux analogiques

Les entrées différentielles +IN et -IN de l'ADS807E ont un rapport signal/bruit élevé, même à des fréquences élevées. Cependant, avec une entrée asymétrique, la puce est un peu plus difficile à piloter que les CA/N. Les frontaux possibles qui peuvent être connectés à K2 dans la Figure 22 sont décrits ci-dessous. La plage dynamique de l'ADS807 est de $2 V_{SS}$, ce qui donne une résolution de $2 V / 4096 = 480 \mu V$.

Frontal 1 : liaison simple

Dans le cas le plus simple, vous ignorez l'entrée différentielle, vous réglez -IN sur CM (Common Mode) et vous envoyez simplement le signal à +IN. On travaille alors en couplage CA et le décalage CC de 2,5 V est fourni par CM (**figure 25**). Si vous souhaitez avoir une impédance d'entrée de 50Ω , vous pouvez simplement connecter une résistance de 50Ω en parallèle de l'entrée K2.

Frontal 2 : couplage en 50Ω par transformateur

En utilisant un transformateur RF avec trois enroulements étroitement couplés avec le même nombre de tours, on peut se servir simplement de l'entrée différentielle. Le prototype utilisait une self de mode commun de 4,7 mH avec quatre enroulements, dont trois seulement sont utilisés (**figure 26**). La self bleue de Siemens est clairement visible sur la figure 23.

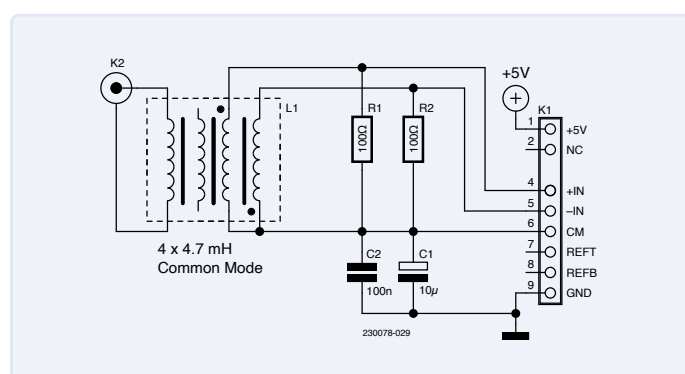


Figure 26. Frontal 50Ω à couplage par transformateur.

Chaque enroulement alimente les entrées +IN et -IN avec des phases opposées. Les enroulements ont chacun une résistance parallèle de 100Ω . Le couplage 1:1 transforme ces résistances en deux résistances de 100Ω connectées en parallèle sur le côté primaire, ce qui donne une impédance d'entrée de 50Ω . Comme le CA/N voit deux fois la tension d'entrée, il en résulte un facteur d'amplification de 2. En même temps, l'entrée est électriquement isolée du CA/N, ce qui évite les interférences de mode commun. Le circuit est bien adapté aux mesures sur des systèmes en 50Ω . Si vous souhaitez bobiner vous-même le transformateur L1, vous devez bobiner les trois enroulements de manière trifilaire (c'est-à-dire un bobinage avec trois fils enroulés ensemble) afin d'obtenir un bon couplage, même à des fréquences élevées. Le noyau doit avoir une perméabilité élevée, même à des fréquences allant jusqu'à 25 MHz.

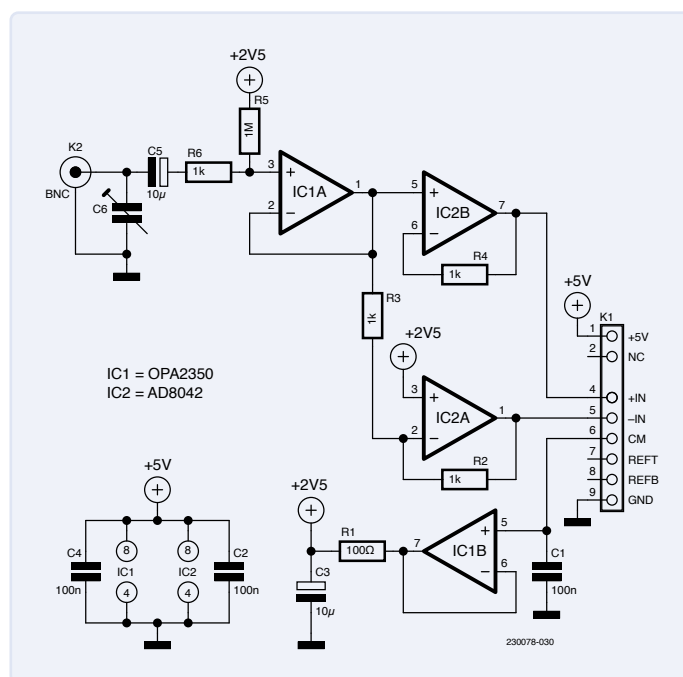


Figure 27. Préamplificateur RF avec une impédance d'entrée de $1 M\Omega$.

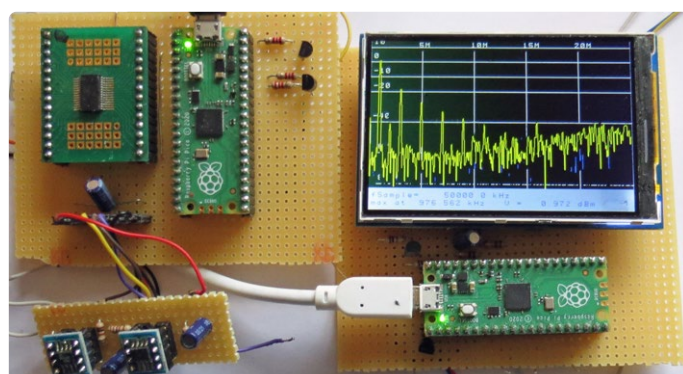


Figure 28. Analyseur de spectre autonome basé sur deux cartes Pico.

Frontal 3 : préamplificateur 25 MHz avec 1 MΩ

Pour certaines mesures, même un analyseur de spectre rapide nécessite une entrée à haute impédance. Cela permet alors d'utiliser les sondes d'oscilloscope habituelles 10:1. La **figure 27** montre le circuit d'un préamplificateur approprié.

L'amplificateur IC1A sert de convertisseur d'impédance avec une résistance d'entrée de 1 MΩ grâce à R5. Le type OPA2350 est non seulement rapide, mais présente aussi un faible courant de polarisation et un faible bruit d'entrée. IC2A et IC2B servent de pilotes bipolaires pour le CA/N. Comme l'entrée unipolaire est convertie en un signal différentiel, il en résulte un facteur d'amplification de deux. On a choisi IC2 en raison de sa grande largeur de bande, de sorte que la différence de phase entre +IN et -IN reste aussi faible que possible. R2 et R4 sont utilisés pour la stabilité de ces amplificateurs. IC1B tamponne la tension d'offset de 2,5 V. La **figure 28** montre, entre autres choses, l'installation du frontal sur une platine.

Bruit

Certaines sources de bruit compliquent la vie des concepteurs de circuits. Au niveau de R5, par exemple, une tension de bruit thermique de $U_{N,RMS} = \sqrt{4 k_B T B R}$ se produit, où k_B est la constante de Boltzmann, T est la température absolue (en Kelvin), B est la largeur de bande (ici 25 MHz) et R est la valeur de R5 (1 MΩ). Il en résulte une tension de bruit effective de 6,3 mV.

Cela représente plusieurs fois la résolution du CA/N, et ce niveau de bruit est fortement perceptible lors des mesures à large bande et à haute impédance. Cela explique également pourquoi un système à faible impédance, par exemple 50 Ω, est plus avantageux pour la RF. Le courant d'entrée d'un OPA2350 a une densité de bruit de 4 fA / √Hz. Il en résulte une tension de bruit effective négligeable de 20 μV au niveau de R5 à une largeur de bande de 25 MHz. Pour le bruit de la tension d'entrée, on spécifie une densité de 7 V / √Hz. Il en résulte une tension de bruit de 30 μV à 25 MHz, ce qui est également négligeable. Cependant, il apparaît clairement que les paramètres de bruit de l'amplificateur influencent la conception. Par exemple, l'AD8042 a un bruit en courant de 500 fA / √Hz et ne convient donc pas comme convertisseur d'impédance à l'entrée.

Affichage graphique

Comme déjà mentionné, il n'est pas possible de connecter le CA/N externe et l'écran LCD en même temps en raison du manque de broches GPIO. Pour un appareil autonome, cette lacune est compensée par l'utilisation de deux cartes Pico séparées : l'une pour l'acquisition des données à partir du CA/N externe, et l'autre pour l'écran LCD. Ce dernier sert de terminal graphique capable

d'exécuter indépendamment diverses fonctions de base telles que le tracé de lignes et de rectangles, ainsi que l'affichage de texte. Les fonctions de l'analyseur de spectre sont implémentées sur la carte Pico avec l'ADS807. Pour la sortie graphique, cette partie envoie les commandes correspondantes au terminal graphique via l'interface série. Au prix de quelques euros pour une carte Pico, cette conception à double carte est économiquement justifiable.

La figure 28 montre à quoi pourrait ressembler cette solution avec deux cartes Pico. L'écran affiche le spectre d'un signal carré de 1 MHz à une fréquence d'échantillonnage de 50 MHz. Les harmoniques diminuent rapidement avec l'accroissement de l'ordre. ◀

VF : Denis Lafourcade — 230078-01

Questions ou commentaires ?

Envoyez un courriel à l'auteur (ossmann@fh-aachen.de), ou contactez Elektor à (redaction@elektor.fr).

À propos de l'auteur

Martin Ossmann a commencé à lire Elektor à l'âge de 12 ans - et à bricoler, bien sûr. Après avoir étudié l'électrotechnique et travaillé pendant plusieurs années comme ingénieur de développement, il a été professeur au département d'électrotechnique et de technologie de l'information de l'université des sciences appliquées d'Aix-la-Chapelle (FH Aachen University of Applied Sciences). Il n'est pas seulement l'auteur de publications scientifiques, mais publie aussi régulièrement des circuits et des projets de logiciels avec beaucoup de savoir-faire technique dans Elektor depuis plus de trois décennies.



Produits

- > **Joy-IT JDS6600 Générateur de signaux et compteur de fréquences**
www.elektor.fr/18714
- > **OWON HDS242 Oscilloscope à 2 canaux (40 MHz) + Multimètre**
www.elektor.fr/20415
- > **Raspberry Pi Pico RP2040**
www.elektor.fr/19562

LIENS

- [1] Identité de Parseval : https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89galit%C3%A9_de_Parseval
- [2] Page web de cet article : <https://www.elektormagazine.fr/230078-04>
- [3] LTspice : <https://tinyurl.com/3zpwzk4y>
- [4] Fiche technique du RP2040 : <https://tinyurl.com/2sf4uvfm>

Rejoignez la communauté Elektor



Devenez membre maintenant !



- ✓ accès à l'archive numérique depuis 1978 !
- ✓ 8x magazine imprimé Elektor
- ✓ 8x magazine numérique (PDF)
- ✓ 10 % de remise dans l'e-choppe et des offres exclusives pour les membres
- ✓ accès à plus de 5000 fichiers Gerber



Également disponible
abonnement
sans papier !



- ✓ accès à l'archive numérique d'Elektor
- ✓ 10 % de remise dans l'e-choppe
- ✓ 8x magazine Elektor (PDF)
- ✓ accès à plus de 5000 fichiers Gerber



www.elektormagazine.fr/membres